生徒の質問から　　　（山田）

$\boxed{\text{問題}}$ $\displaystyle\int\frac{dx}{1-\sin x}$ を求めよ。$\left(x \fallingdotseq \frac{\pi}{2}\right)$

$\boxed{\text{解}}$ $\displaystyle\int\frac{dx}{1-\sin x}=\int\frac{1+\sin x}{(1-\sin x)(1+\sin x)}dx$ …①

$$=\int\frac{1+\sin x}{1-\sin^2 x}dx=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{\sin x}{\cos^2 x}\right)dx$$

$$=\tan x+\frac{1}{\cos x}+C \cdots ②$$

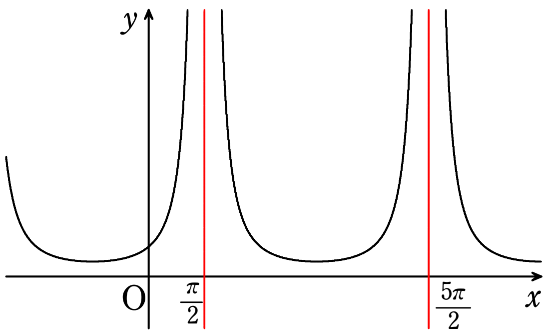
質問「①は $\sin x \fallingdotseq -1$ だから、$x \fallingdotseq \frac{\pi}{2}$ だけでなく $x \fallingdotseq \frac{3}{2}\pi$

も必要では？」

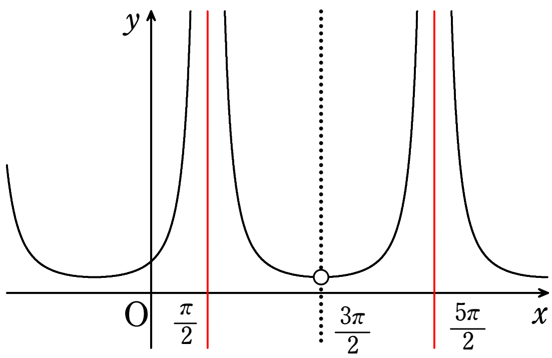
言われてみればその通りだが、問題集の解答には書かれていない。

グラフを書くと、$x=\frac{3\pi}{2}$ に穴が空いている。

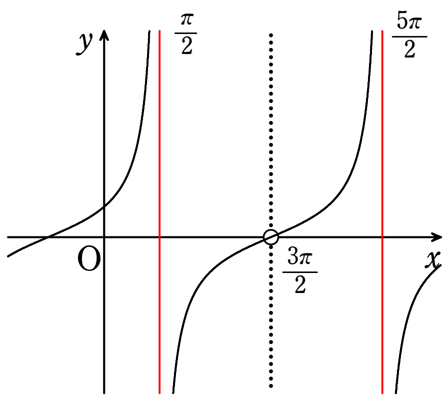
$f(x)=\dfrac{1}{1-\sin x}$



$g(x)=\dfrac{1+\sin x}{(1-\sin x)(1+\sin x)}$



$\displaystyle\int g(x)dx=\tan x+\frac{1}{\cos x}$

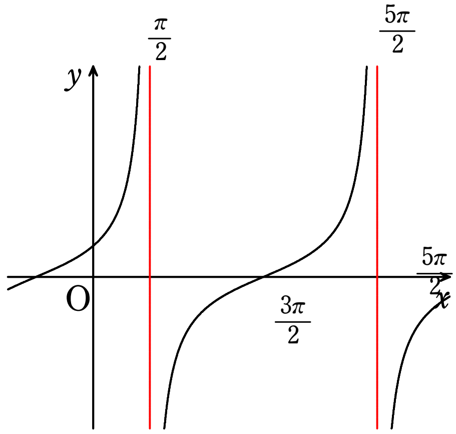


実は　$\tan x+\dfrac{1}{\cos x}$

$$=\frac{\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)^2}{\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)}$$

$$=\frac{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}$$　と変形すれば、

$$F(x)=\frac{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}$$



問題の$x=\dfrac{3\pi}{2}$は約分で消える。

しかし、解答はあくまで②であり、

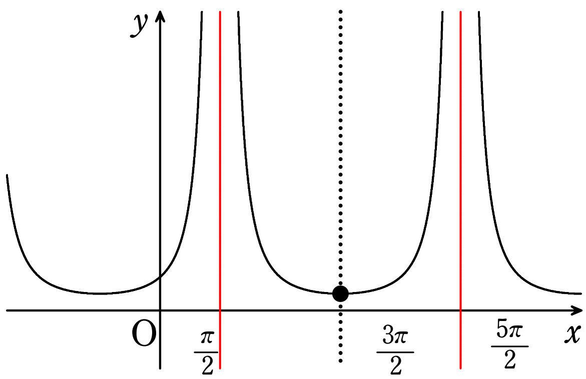
$x=\dfrac{3\pi}{2}$ の「特異点」は残る。

これでは定積分のときも困るのではないか？

$\boxed{\text{解決策（暗黙の了解？）}}$

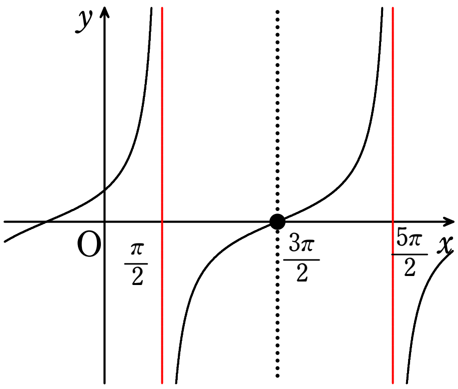
以下のようにすれば、定積分で$x=\dfrac{3}{2}\pi$ を含む場合でも問題ない。

（「除去可能な特異点」というらしい。）



$$g(x)=\frac{1+\sin x}{(1-\sin x)(1+\sin x)}$$

ただし $g\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$ とする



$$\int g(x)dx = \tan x + \frac{1}{\cos x} = G(x)$$

ただし $G\left(\frac{3\pi}{2}\right)=0$ とする

これで $x=\frac{3\pi}{2}$ を積分区間に含む場合も、問題なく使用できる。

つまり解答で「$\frac{1}{1-\sin x} = \frac{1+\sin x}{(1-\sin x)(1+\sin x)}$」と書くとき、

「ただし $x=\frac{3\pi}{2}$ のときは、その値を $\frac{1}{2}$ とする」を「暗黙の了解事項」

とすれば、初めから不連続点は考えなくてもてよい。

しかし、これは生徒に指摘されるまで気づかなかったことである。

$\boxed{\text{別解}}$　　$\tan\dfrac{x}{2}=t$　で置換する。

$$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}=\frac{2t}{1+t^2}\ ,\ dx=\frac{2}{1+t^2}dt\quad \text{より}$$

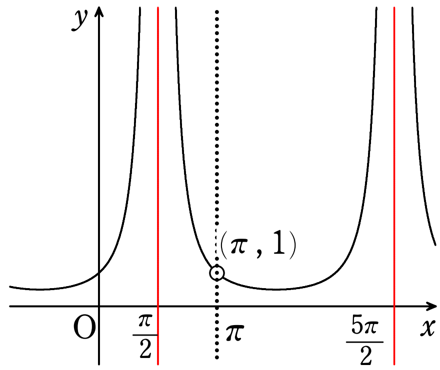
$$\int\frac{1}{1-\sin x}dx=\int\frac{1}{1-\dfrac{2t}{1+t^2}}\frac{2\,dt}{1+t^2}=\int\frac{2\,dt}{(1-t)^2}=\frac{2}{1-t}$$

$$=\frac{2}{1-\tan\dfrac{x}{2}}+C \qquad \cdots③$$

②③は見かけ上異なるが、
実は変形すると定数 1 だけ異なり、
同じ不定積分である。

この解答は、今度は　$x=\pi$ が
「除去可能な特異点」になる。
よって、本当は
「$\tan\dfrac{x}{2}=t$　で置換する。
ただし $x=\pi$ のときは、
$g(x)=1$ 、$G(x)=0$ とする」
と書くべきところだろう。

$$g(x)=\frac{2\tan\dfrac{x}{2}}{1+\tan^2\dfrac{x}{2}}$$



$$G(x)=\frac{2}{1-\tan\dfrac{x}{2}}$$