

# 3つの三角形の面積が等しくなる点の作図について

龍谷大学 大西俊弘

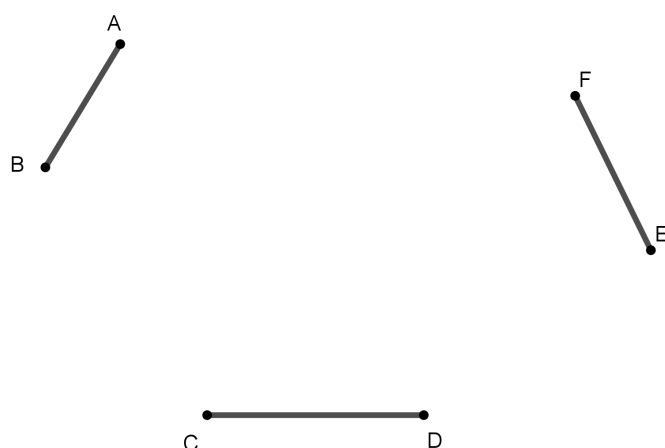
## 1. はじめに

令和5年11月24日（金）に京都光華中学校で、令和5年度「GC活用研究会（京都）」が開催された。その研究会では、京都光華中学校の宇治野忠博先生がオリジナルの問題を提示され、その問題を生徒たちが探究する公開授業が実施された。参観者には事前に課題となる問題が提示されていたが、授業開始時点でも私は正解が分からなかった。授業後に、自分なりに考えてみた解法を報告する。

## 2. 探究課題

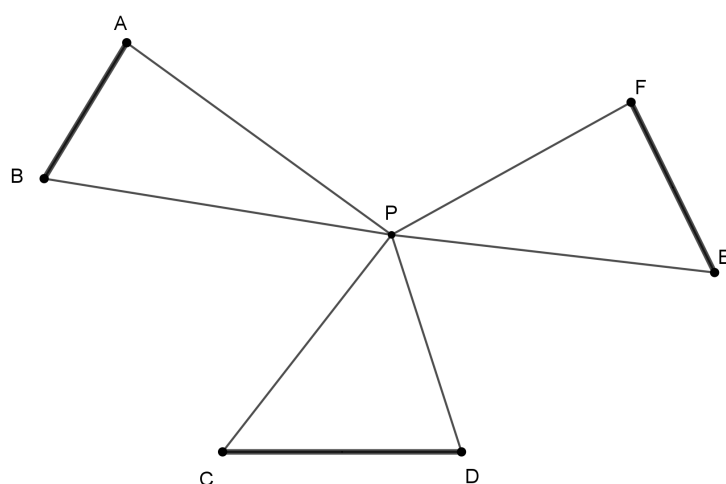
宇治野先生が提示された問題は、次のようなものである。

【問題】線分 AB, CD, EF があるとき、 $\triangle PAB = \triangle PCD = \triangle PEF$  となる点 P はみつかるでしょうか？



（注）各線分の長さは任意であり、どの2つの線分の長さも等しいとは限らない。また、どの2つの線分も、1点で交差することはなく、平行でもないとする。

（注）「 $\triangle PAB = \triangle PCD = \triangle PEF$  となる点 P を作図せよ」と言い換えてもよい。

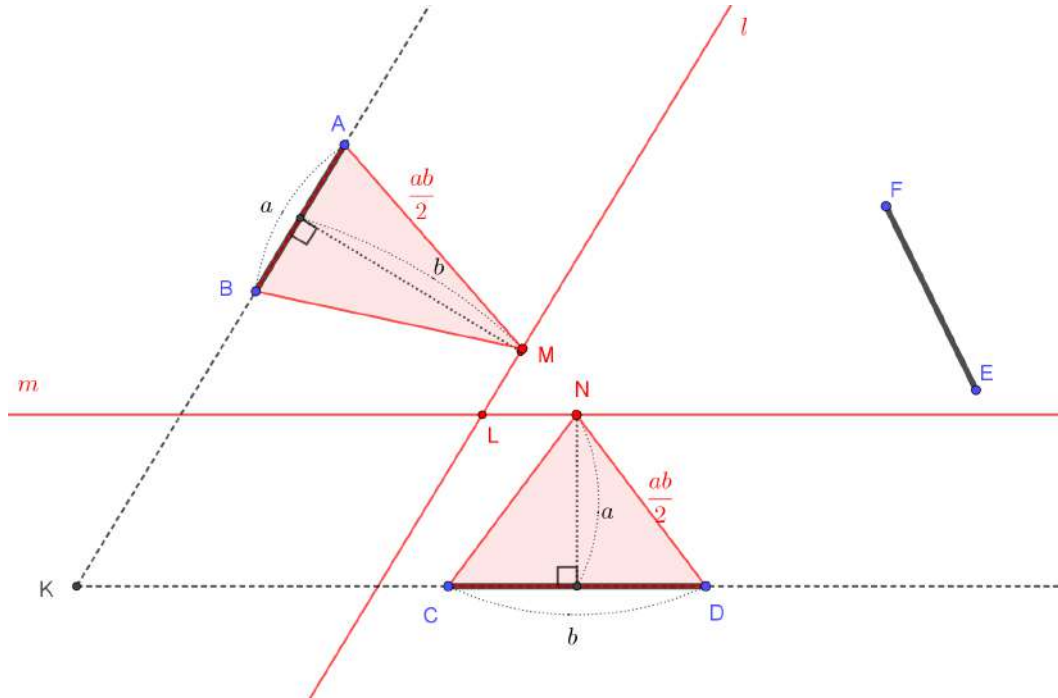


### 3 どのように考えたか

#### (ア) とりあえず面積が等しい2つの三角形を作図してみる

線分 AB, CD の長さをそれぞれ  $a, b$  とする。

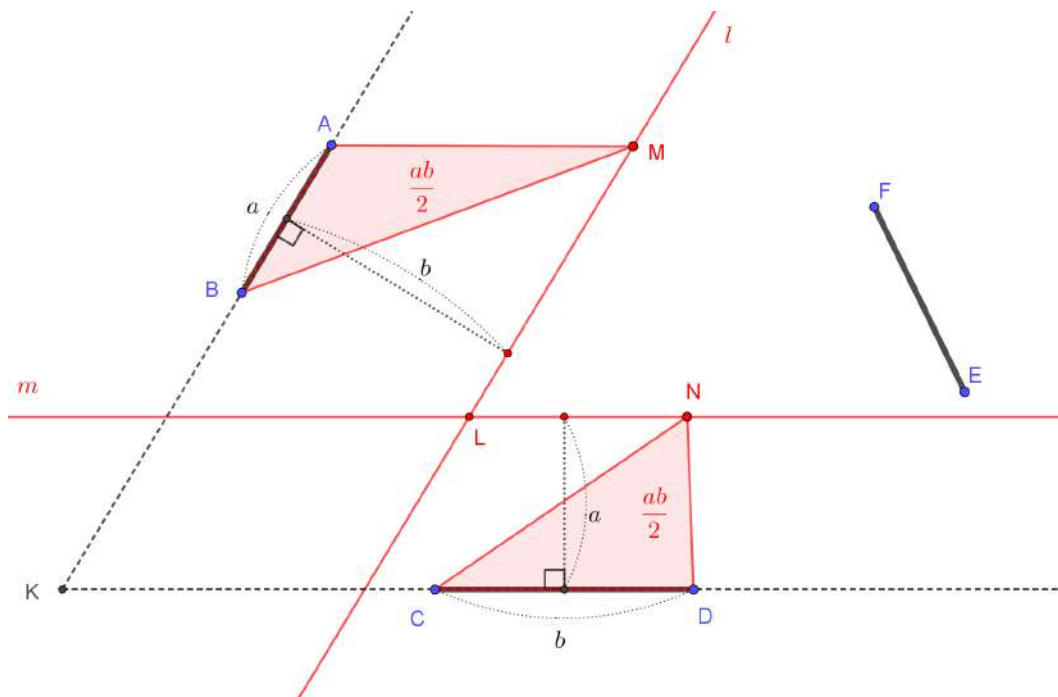
下図のように、線分 AB が底辺で高さが  $b$  である  $\triangle ABM$  と、線分 CD が底辺で高さが  $a$  である  $\triangle CDN$  を考えると、両者の面積は等しくなる。すなわち、 $\triangle ABM = \triangle CDN = \frac{1}{2}ab$



#### (イ) 面積が等しい2つの三角形は無数に作図出来る (等積変形)

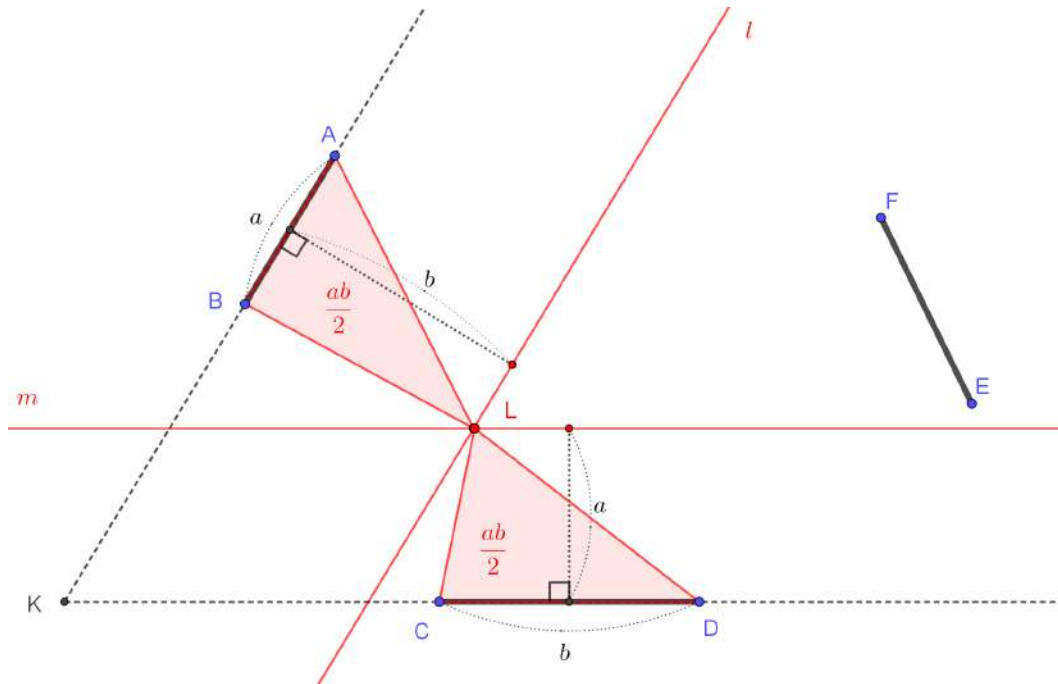
線分 CD からの距離が  $a$  である直線を  $m$ 、線分 AB からの距離が  $b$  である直線を  $l$  とする。

点 M が直線  $l$  上にあり、点 N が直線  $m$  上にあるとき、常に  $\triangle ABM = \triangle CDN = \frac{1}{2}ab$  となる。



(ウ) 共通の点を頂点とし、面積が等しい2つの三角形

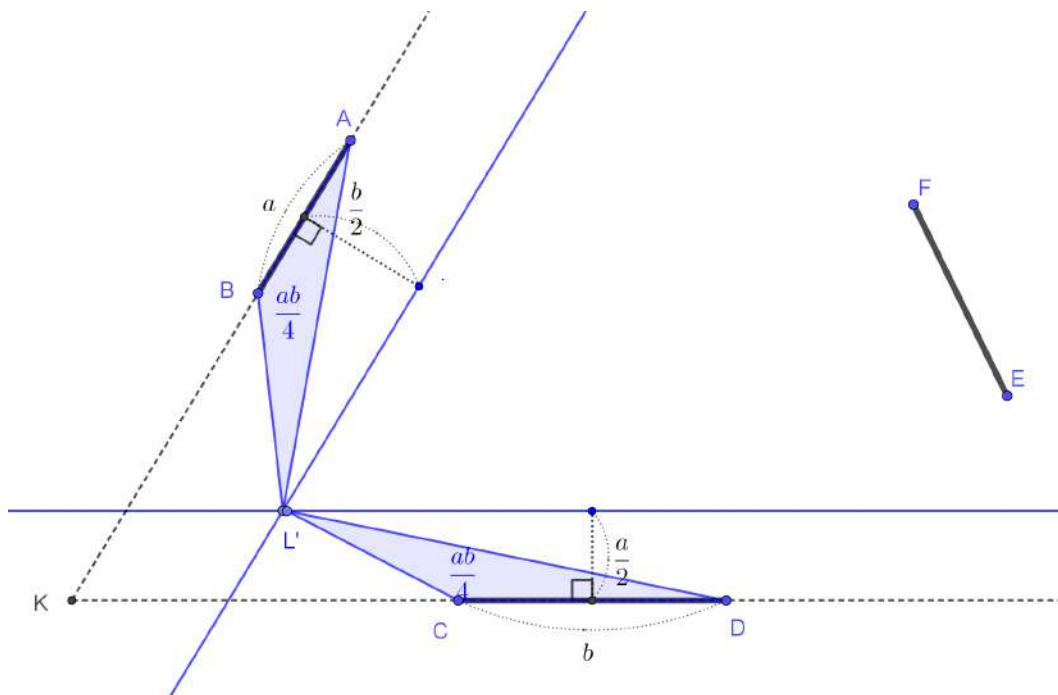
直線 $m$ と直線 $l$ の交点を $L$ とすると、 $\triangle ABL = \triangle CDL = \frac{1}{2}ab$ となる。



(エ) 共通の点を頂点とし、面積が等しい2つの三角形（高さが半分の場合）

三角形の高さがそれぞれ $\frac{b}{2}, \frac{a}{2}$ になった場合でも、(ウ)と同様の結果が得られる。

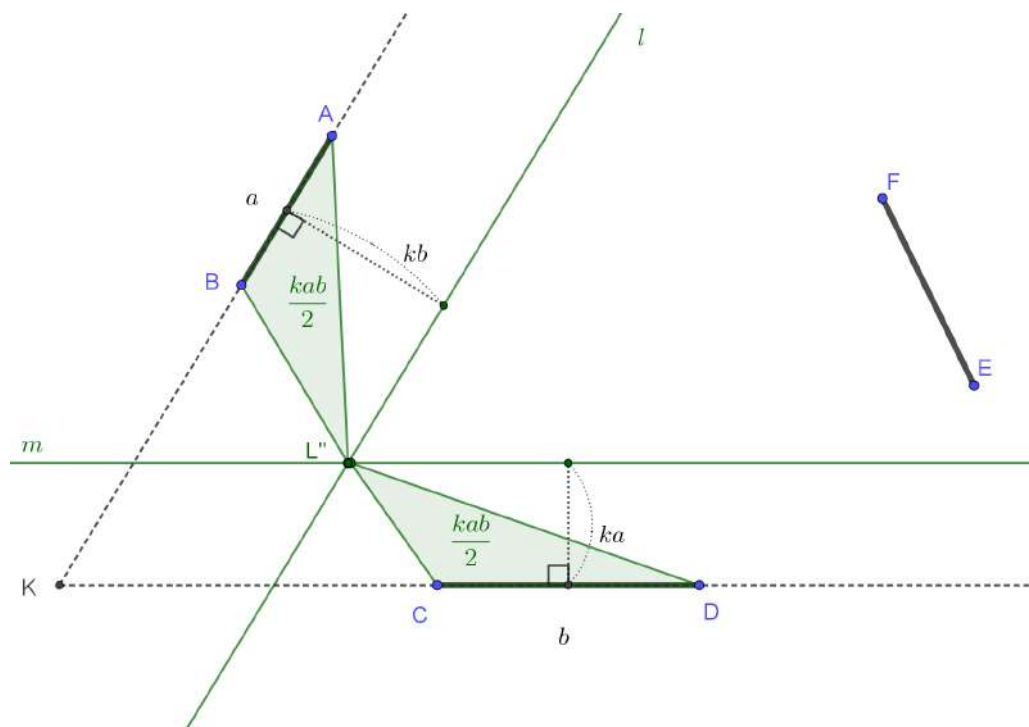
$\triangle ABL' = \triangle CDL' = \frac{1}{4}ab$ となる。



(オ) 共通の点を頂点とし、面積が等しい2つの三角形（一般の場合）

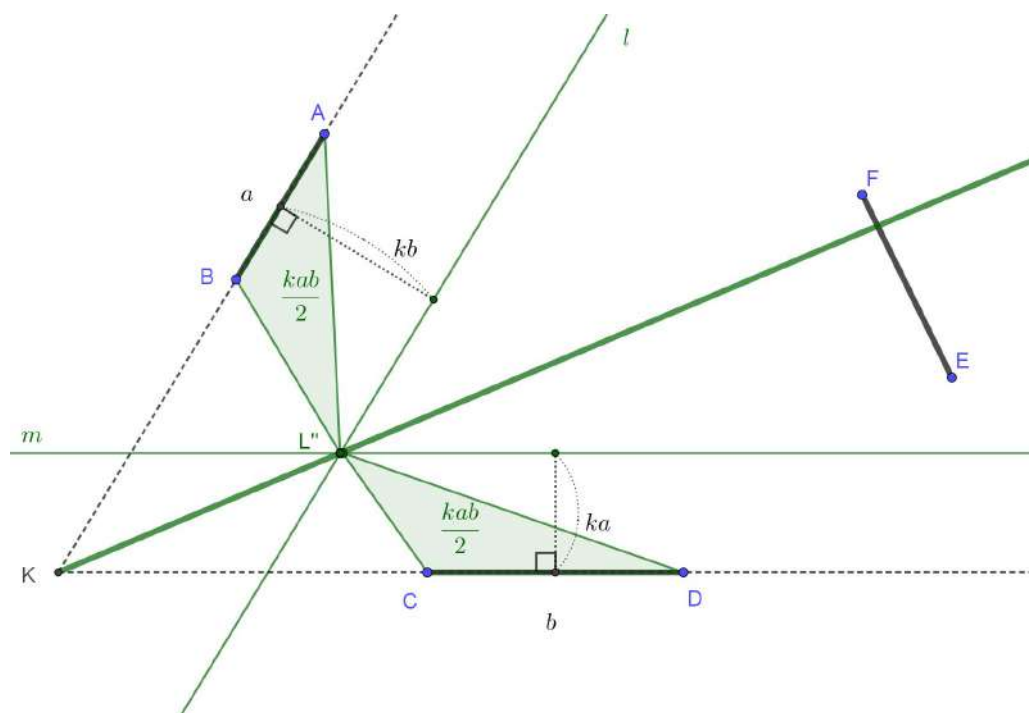
三角形の高さがそれぞれ $kb, ka$ の場合でも、(ウ)と同様の結果が得られる。

$\triangle ABL'' = \triangle CDL'' = \frac{1}{2}kab$ となる。



(カ) 2つの三角形の面積が等しくなる共通の頂点は無数に存在し、頂点は半直線上にある

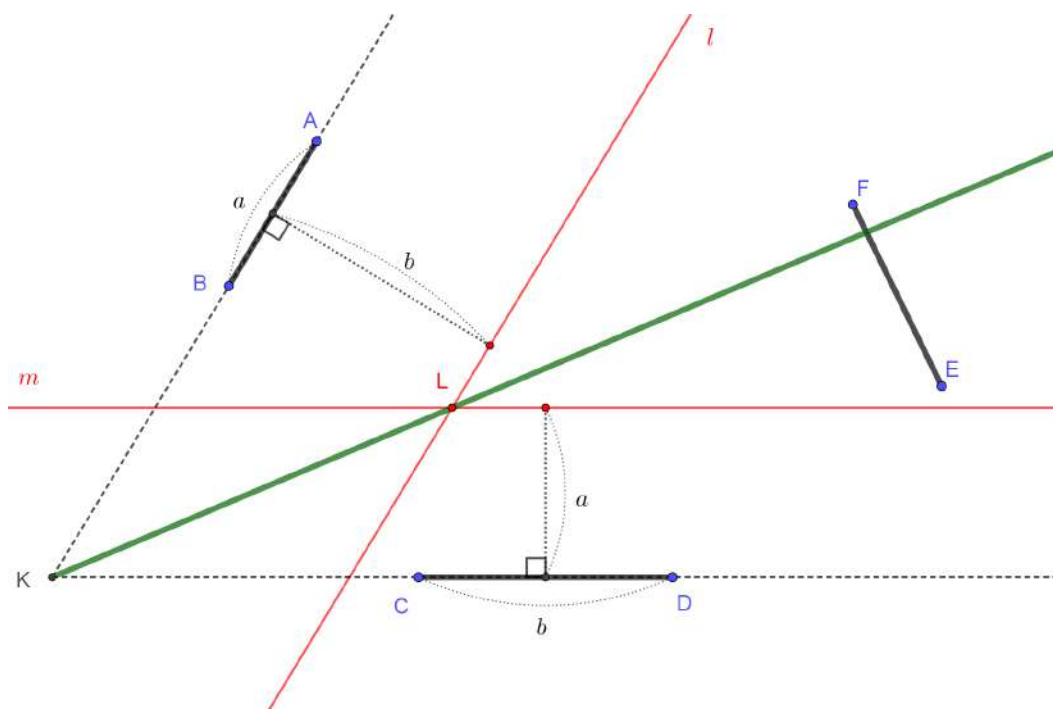
(ウ)、(エ)、(オ) に示した  $L$ 、 $L'$ 、 $L''$  のような点は無数にあり、(相似関係から) 下図に示すような半直線上にある。



(キ) 2つの三角形の面積が等しくなる頂点が存在する半直線の作図方法

直線 AB と直線 CD の交点を K とするとき、半直線 KL を作図すればよい。

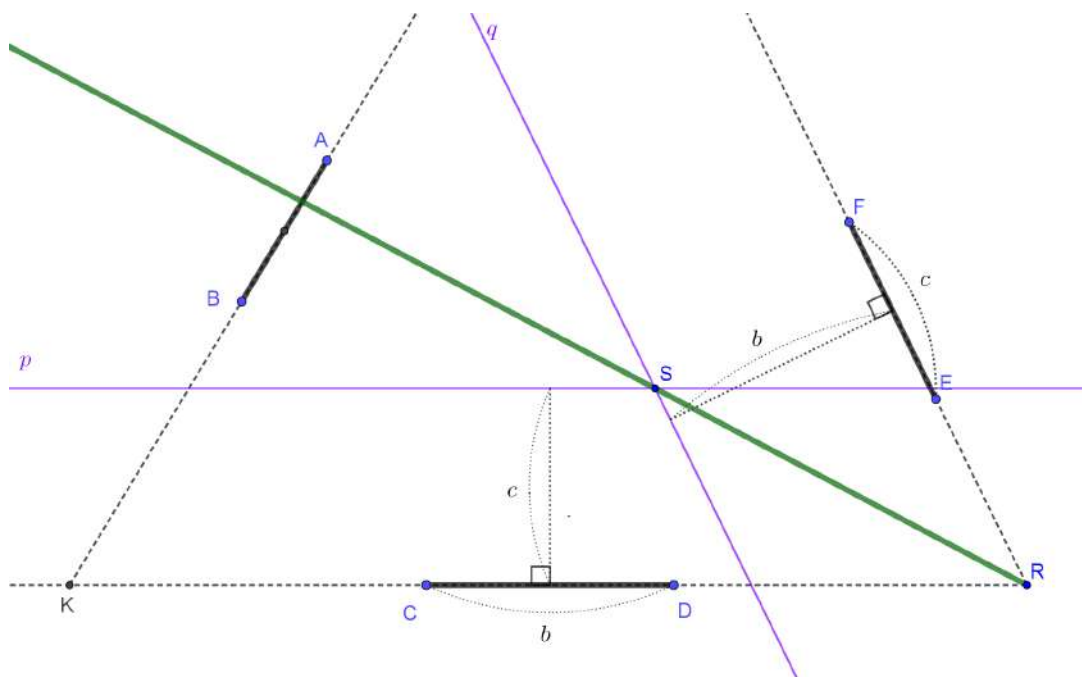
(半直線 KL 上の任意の位置に点 X をとると、常に  $\triangle ABX = \triangle CDX$  となる。)



(ク) 2つの三角形の面積が等しくなる頂点が存在する半直線の作図方法

(キ) と同様に、直線 CD と直線 EF の交点を R とするとき、半直線 RS を作図すればよい。

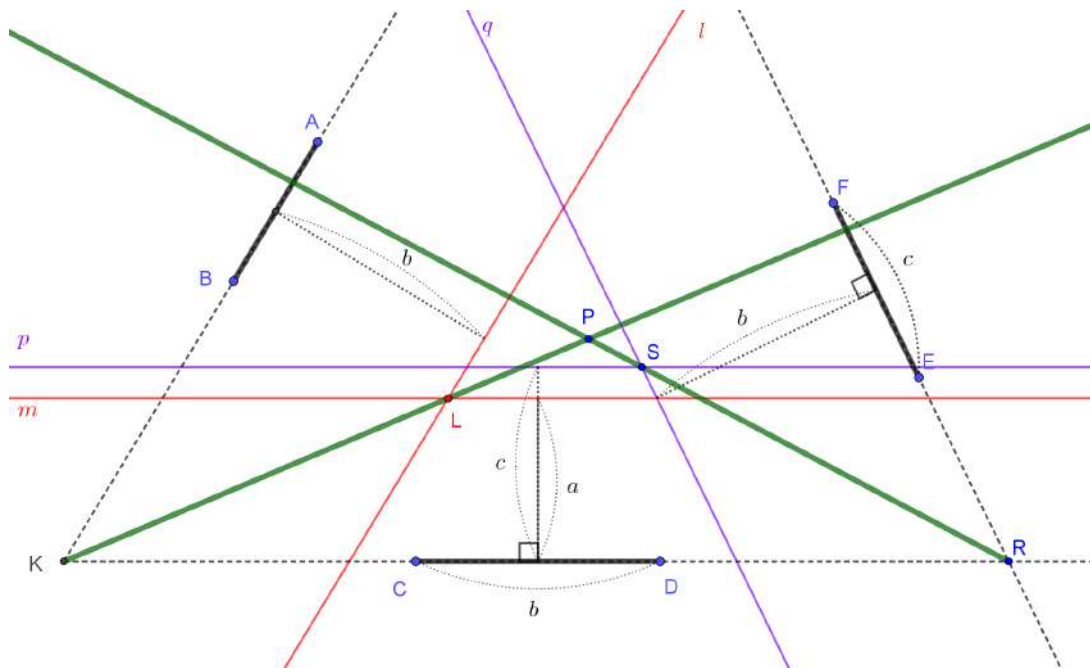
(半直線 RS 上の任意の位置に点 Y をとると、常に  $\triangle CDY = \triangle EFY$  となる。)



(ケ) 3つの三角形の面積が等しくなる頂点の作図方法

(キ)、(ク)の結果より、半直線 KL と半直線 RS の交点 P を作図すればよい。

(常に $\triangle ABP = \triangle CDP = \triangle EFP$  となる。)



(二) 検証

実際に作図を行い、面積を計測した結果。

