

重心について

草彅浩二

1. はじめに

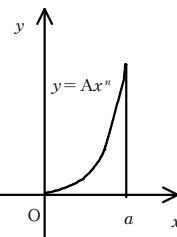
1/26(土)に10:00から北陸地区の研究集会で、小林俊道先生のお話があり、その資料として、「①コマをまわして」「②コマの生徒作品と授業感想」「⑩積分の入口(重心を求める)」がありました。

それを見ていた富山の廣上雄亮先生と重心についてメールのやり取りがありました。

2. $y = Ax^n$ の重心

$y = Ax^n$ のグラフと x 軸と $x = a$ で囲まれる部分の重心の x 座標を計算すると

$$x_G = \frac{\int_0^a x Ax^n dx}{\int_0^a Ax^n dx} = \frac{\left[\frac{A}{n+2} x^{n+2} \right]_0^a}{\left[\frac{A}{n+1} x^{n+1} \right]_0^a} = \frac{\frac{A}{n+2} a^{n+2}}{\frac{A}{n+1} a^{n+1}} = \frac{n+1}{n+2} a$$



となります。 x^n の係数 A は、 y 軸方向の拡大をするだけなので、重心の x 座標には影響されません。

この図形を厚紙に描いて切り取って、 x 軸上のこの座標の位置に糸を付けて手を離すと、上下が逆さまになって水平に釣り合います。この糸の延長線上に図形の重心が存在します。

3. $y = Ax^n + Bx^m$ の重心

では、整関数のグラフの場合を考えたいとなりました。というのは、四角形の重心を求めるときは、その四角形を2つの三角形に分割して、それぞれの重心と面積を求めて、その分割した2つの三角形の重心を結ぶ線分を面積の比で内分する点、四角形の重心になることを思い出したからです。

それで、 $y = Ax^n + Bx^m$ のグラフと x 軸と $x = a$ で囲まれる部分の重心の x 座標を考えてみます。 $y = Ax^n$ の部分は、重心が $\frac{n+1}{n+2}a$ で面積は $\frac{A}{n+1}a^{n+1}$ になります。また $y = Bx^m$ の部分は、重心が $\frac{m+1}{m+2}a$ で面積が $\frac{B}{m+1}a^{m+1}$ になります。

$$\begin{aligned} \text{だから。} \\ x_G &= \frac{\left(\frac{A}{n+1} a^{n+1} \right) \left(\frac{n+1}{n+2} a \right) + \left(\frac{B}{m+1} a^{m+1} \right) \left(\frac{m+1}{m+2} a \right)}{\left(\frac{A}{n+1} a^{n+1} \right) + \left(\frac{B}{m+1} a^{m+1} \right)} = \frac{\left(\frac{A}{n+2} \right) a^{n+2} + \left(\frac{B}{m+2} \right) a^{m+2}}{\left(\frac{A}{n+1} a^{n+1} \right) + \left(\frac{B}{m+1} a^{m+1} \right)} \\ &= \frac{\frac{A}{n+2} a^{n+2} + \frac{B}{m+2} a^{m+2}}{\frac{A}{n+1} a^{n+1} + \frac{B}{m+1} a^{m+1}} = \frac{(n+1)(m+1)(m+2)Aa^{n+2} + (n+1)(m+1)(n+2)Ba^{m+2}}{(m+1)(n+2)(m+2)Aa^{n+1} + (n+1)(n+2)(m+2)Ba^{m+1}} \end{aligned}$$

となります。

本当にいいのか、積分で確認してみます。

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{\int_0^a x(Ax^n + Bx^m) dx}{\int_0^a (Ax^n + Bx^m) dx} = \frac{\left[\frac{A}{n+2} x^{n+2} + \frac{B}{m+2} x^{m+2} \right]_0^a}{\left[\frac{A}{n+1} x^{n+1} + \frac{B}{m+1} x^{m+1} \right]_0^a} = \frac{\frac{A}{n+2} a^{n+2} + \frac{B}{m+2} a^{m+2}}{\frac{A}{n+1} a^{n+1} + \frac{B}{m+1} a^{m+1}} \\ &= \frac{(n+1)(m+1)(m+2)Aa^{n+2} + (n+1)(m+1)(n+2)Ba^{m+2}}{(m+1)(n+2)(m+2)Aa^{n+1} + (n+1)(n+2)(m+2)Ba^{m+1}} = \frac{\frac{Aa^{n+2}}{n+2} + \frac{Ba^{m+2}}{m+2}}{\frac{Aa^{n+1}}{n+1} + \frac{Ba^{m+1}}{m+1}} \end{aligned}$$

となり、一致しました。

$a = 1$ の場合だと

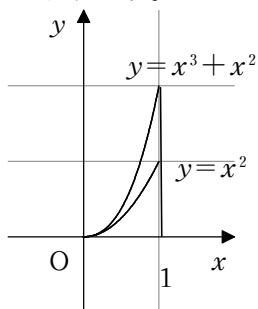
$$x_G = \frac{(n+1)(m+1)(m+2)A + (n+1)(m+1)(n+2)B}{(m+1)(n+2)(m+2)A + (n+1)(n+2)(m+2)B} = \frac{\frac{A}{n+2} + \frac{B}{m+2}}{\frac{A}{n+1} + \frac{B}{m+1}}$$

となり、

さらに、 $A = B = 1$ だと

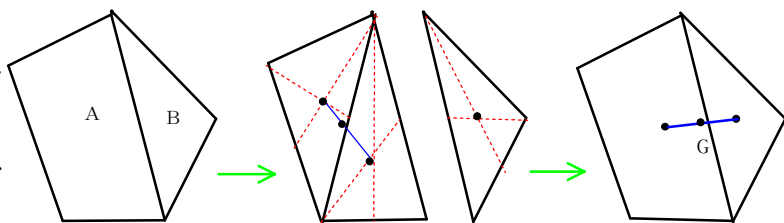
$$x_G = \frac{(n+1)(m+1)(m+2) + (n+1)(m+1)(n+2)}{(m+1)(n+2)(m+2) + (n+1)(n+2)(m+2)} = \frac{\frac{1}{n+2} + \frac{1}{m+2}}{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{m+1}}$$

となります。



4. 二次関数 $y = Ax^2 + Bx + C$ の重心

五角形の重心を求めるには、その図形を四角形Aと三角形Bに分割して、まず、四角形Aの重心と面積を求めます。四角形Aの重心は、2つの三角形C、Dに分割して、それぞれの重心と面積を求めて、その2つの重心を結ぶ線分を面積の比に内分する点が四角形Aの重心になります。四角形Aの重心が求めれば、三角形Bの重心と面積を求めて、その2つの重心を結ぶ線分を四角形Aの面積と三角形Bの面積比に内分する点が五角形の重心になります。このようにして六角形、七角形、……の重心を求めることができます。



それで、同じようにもう一つ項を加えてみます。

3の結果から、 $y = Ax^2 + Bx$ のグラフと x 軸と $x = a$ で囲まれた部分の重心と面積は

$$\text{重心} \quad x_G = \frac{\frac{Aa^{n+2}}{n+2} + \frac{Ba^{n+2}}{m+2}}{\frac{Aa^{n+1}}{n+1} + \frac{Ba^{n+1}}{m+1}} = \frac{\frac{Aa^4}{4} + \frac{Ba^3}{3}}{\frac{Aa^3}{3} + \frac{Ba^2}{2}} = \frac{3Aa^2 + 4Ba}{4Aa + 6B}$$

$$\text{面積} \quad S = \frac{A}{n+1}a^{n+1} + \frac{B}{m+1}a^{m+1} = \frac{A}{2+1}a^{2+1} + \frac{B}{1+1}a^{1+1} = \frac{A}{3}a^3 + \frac{B}{2}a^2$$

となるので、これに $y = C$ のグラフと x 軸と $x = a$ と $x = 0$ で囲まれる部分の重心と面積を考えて、面積比で内分をすればいいことになります。もちろん、この直線の場合は積分をするまでもなく、

$$\text{重心} \quad x_G = \frac{1}{2}a \quad \text{面積} \quad S = Ca$$

になるので、二次関数 $y = Ax^2 + Bx + C$ の重心は

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{\left(\frac{A}{3}a^3 + \frac{B}{2}a^2\right)\left(\frac{3Aa^2 + 4Ba}{4Aa + 6B}\right) + Ca\left(\frac{1}{2}a\right)}{\left(\frac{A}{3}a^3\right) + \left(\frac{B}{2}a^2\right) + Ca} \\ &= \frac{(2Aa^3 + 3Ba^2)(3Aa^2 + 4Ba) + 3Ca^2(4Aa + 6B)}{(2Aa^3 + 3Ba^2 + 6Ca)(4Aa + 6B)} \\ &= \frac{6A^2a^5 + 8ABa^4 + 9ABa^4 + 12B^2a^3 + 12ACa^3 + 18BCa^2}{(2Aa^3 + 3Ba^2 + 6Ca)(4Aa + 6B)} \\ &= \frac{a^2(6A^2a^3 + 17ABa^2 + 12B^2a + 12ACa + 18BC)}{(2Aa^2 + 3Ba + 6C)2a(2Aa + 3B)} \\ &= \frac{a(6A^2a^3 + 17ABa^2 + 12B^2a + 12ACa + 18BC)}{2(2Aa^2 + 3Ba + 6C)(2Aa + 3B)} \end{aligned}$$

となります。

これも本当に正しいのか、積分で計算してみると、

$$\begin{aligned}x_G &= \frac{\int_0^a x(Ax^2 + Bx + C)dx}{\int_0^a (Ax^2 + Bx + C)dx} = \frac{\left[\frac{A}{4}x^4 + \frac{B}{3}x^3 + \frac{C}{2}x^2\right]_0^a}{\left[\frac{A}{3}x^3 + \frac{B}{2}x^2 + Cx\right]_0^a} = \frac{\frac{A}{4}a^4 + \frac{B}{3}a^3 + \frac{C}{2}a^2}{\frac{A}{3}a^3 + \frac{B}{2}a^2 + Ca} \\&= \frac{3Aa^4 + 4Ba^3 + 6Ca^2}{4Aa^3 + 6Ba^2 + 12Ca} = \frac{3Aa^3 + 4Ba^2 + 6Ca}{4Aa^2 + 6Ba + 12C}\end{aligned}$$

と一致しなさそうです。面積の比で内分した式の分子の因数分解が分かりません。

もしかしたら、 $(2Aa + 3B)(3Aa^3 + 4Ba^2 + 6Ca) = 6A^2a^4 + 17ABa^3 + 12B^2a^2 + 121ACa^2 + 18BCa$ となるのではないかと考えてみました。

$$\begin{aligned}&(2Aa + 3B)(3Aa^3 + 4Ba^2 + 6Ca) \\&= 6Aa^4 + 8ABa^3 + 12ACa^2 + 9ABa^3 + 12B^2a^2 + 18BCa \\&= 6A^2a^4 + 17ABa^3 + 12B^2a^2 + 121ACa^2 + 18BCa\end{aligned}$$

すると、一致することが分かりました。