# カージオイド、リマソンの不親切な説明をきっかけとして　（山田）

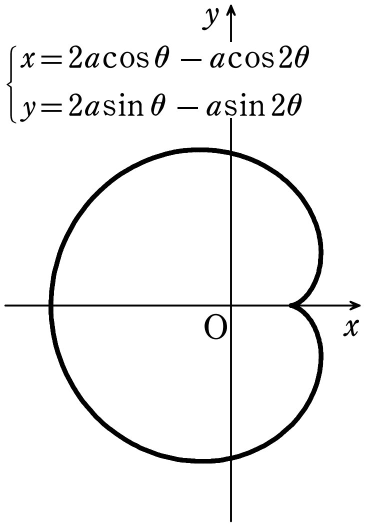
数学Cの教科書には、受験によく出るためか、①が媒介変数表示の例として、②③は巻末などに極方程式の例として載っている。（通常①の図解は載っているが②③の図解は少ない）。

疑問$\boxed{1}$　同じカージオイドが外見の違う式になる理由の説明がない。不親切ではないか？

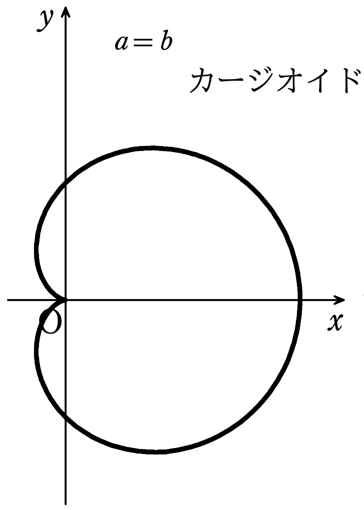
疑問$\boxed{2}$　教科書には媒介変数表示の例としてアステロイドなどの内外サイクロイド、トロコイドも載っているが、極方程式は載っていない。なぜか？

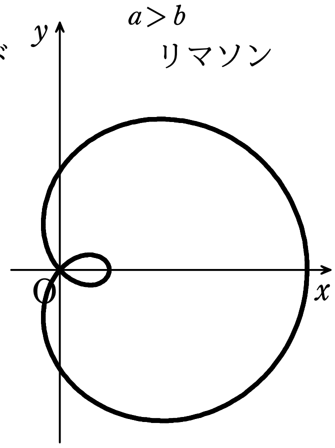
① カージイオイド

$$\begin{cases} x=2a\cos\theta-a\cos 2\theta \\ y=2a\sin\theta-a\sin 2\theta \end{cases}$$

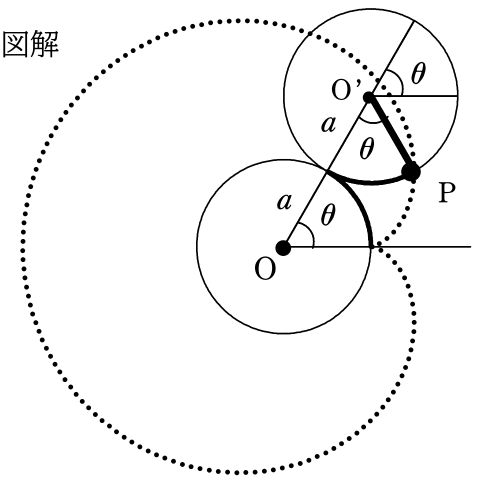



②　$r=a\cos\theta+b$




①の図解

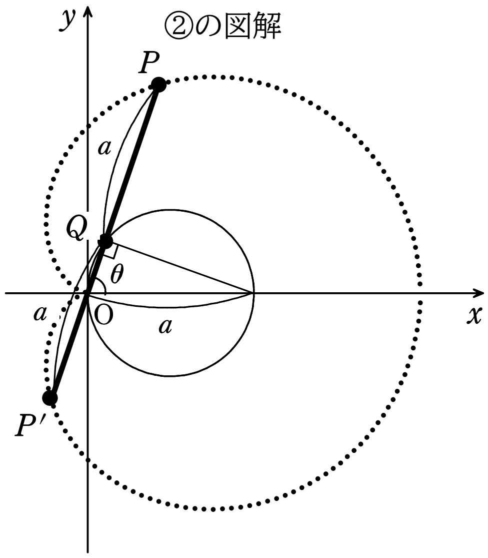



$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OO'}}+\overrightarrow{\mathrm{O'P}}$$

$$=\begin{pmatrix}2a\cos\theta\\2a\sin\theta\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a\cos(2\theta+\pi)\\a\sin(2\theta+\pi)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2a\cos\theta-a\cos 2\theta\\2a\sin\theta-a\sin 2\theta\end{pmatrix}$$

②の図解

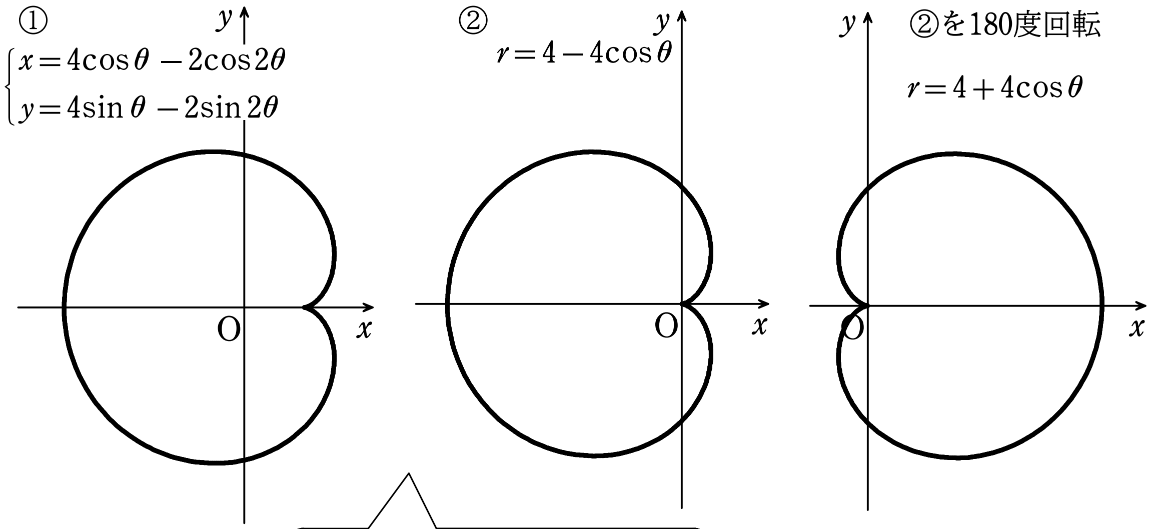



上図で $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき

$OP=r=OQ+QP=a\cos\theta+a$

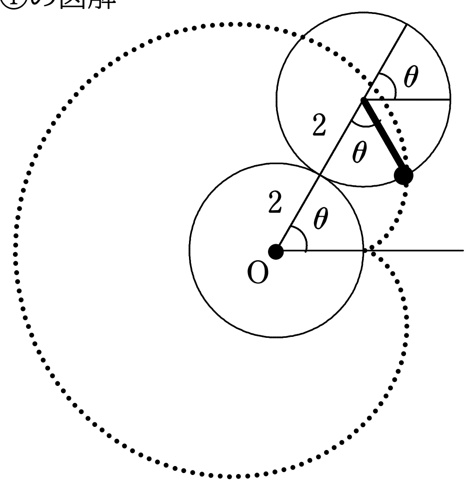
$\pi\leqq\theta\leqq\dfrac{3\pi}{2}$ のとき

$OP'=r=-OQ+QA=a\cos\theta+a$

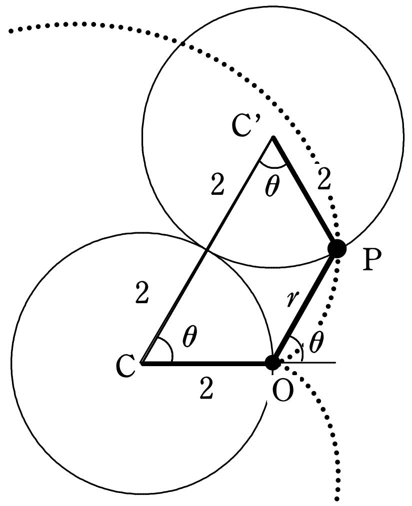



**形は同じだが原点Oが異なる**

①の図解

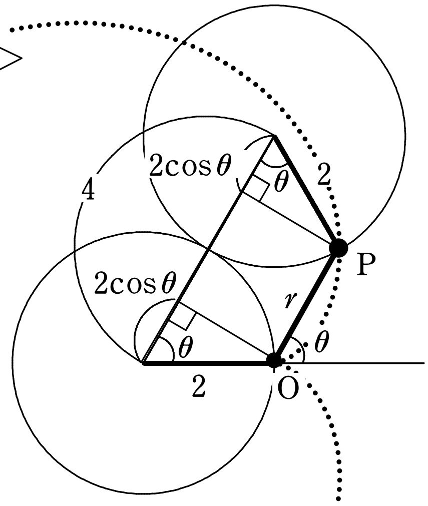



②の図解：OPC'Cは等脚台形。



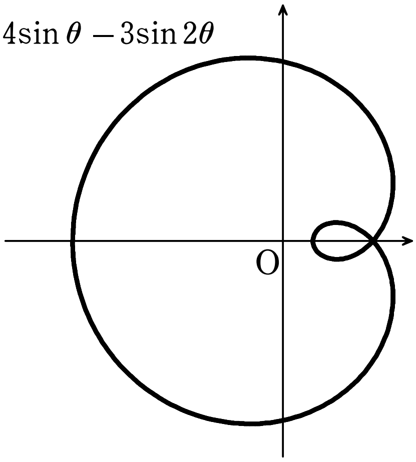

**偏角 θ とパラメータ θ が一致**
するから極座標表示がカンタン
になる。これは
**２つの円の半径が一致する場合のみ。**
これ以外では極座標表示は複雑になり、
メリットがない。
（ネフロイドやアステロイドなど）

$OP=r=4-4\cos\theta$



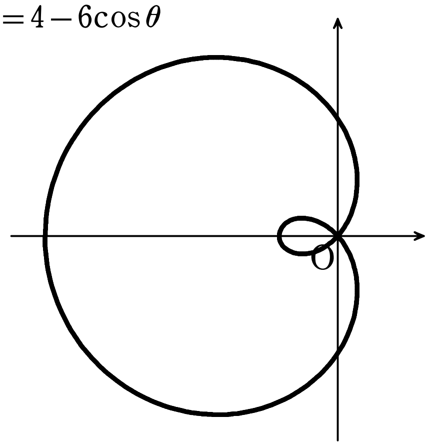
③

$$\begin{cases} x=4\cos\theta-3\cos 2\theta \\ y=4\sin\theta-3\sin 2\theta \end{cases}$$

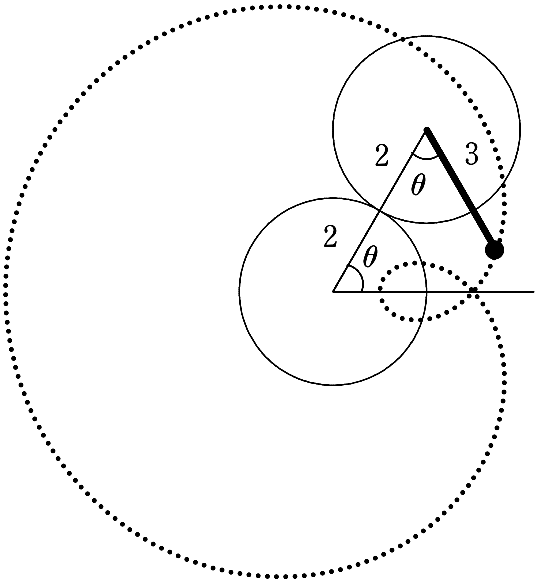



④

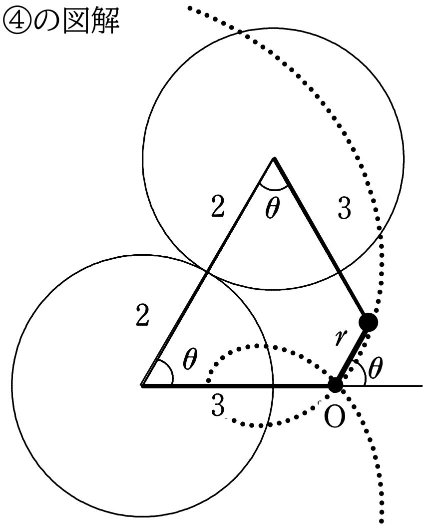
$r=4-6\cos\theta$

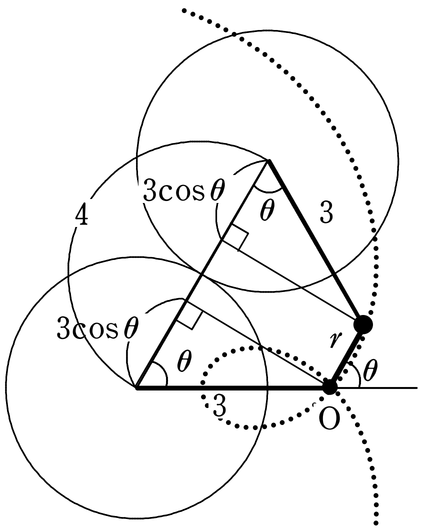


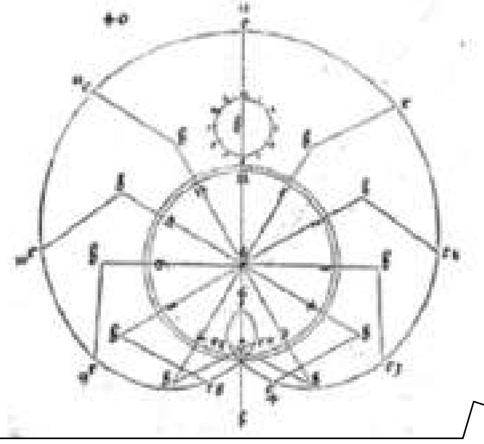

③の図解




④の図解



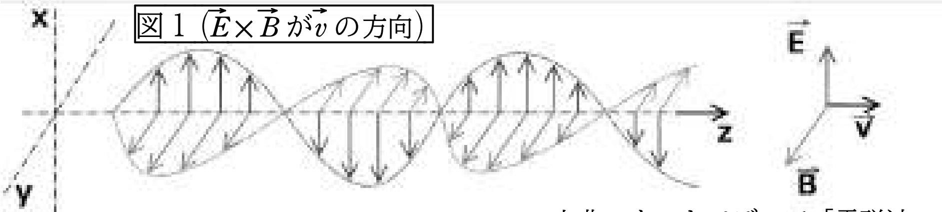



画家アルブレヒト・デューラーの著作「計量法」(1525)
で世界で最初に紹介されたリマソン

## 疑問$\boxed{3}$　カージオイドの極座標表示は何かの役に立つのか？

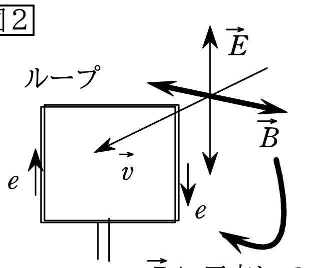
例　電波の方向探知の原理；ある電波がどこからやってくるのか見つける

図１（$\vec{E}\times\vec{B}$ が $\vec{v}$ の方向）




出典：ウィキペディア「電磁波」

図２



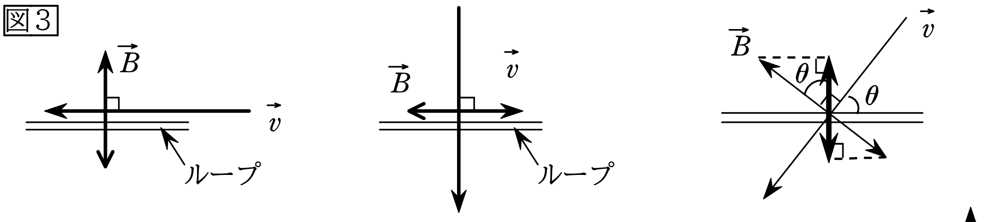

$\vec{B}$ に反応して
$e$ が発生

1．電波は図１のように電場 $\vec{E}$ と磁場 $\vec{B}$ が互いに垂直な面内で振動しながら速度 $\vec{v}$ で進む。

2．金属線のループ（輪）アンテナに電波が入射すると、磁場 $\vec{B}$ の変化による電磁誘導でループに起電力 $e$ が発生する。（図２）
これがループアンテナによる電波の受信である。

3．今、ループが鉛直面内にあるとする。電波でよく使われるAM波などは磁場 $\vec{B}$ が水平面内で振動するから、ループを真上から見ると、図３のように起電力 $e$ は入射角$\theta$に比例する。
よって　　$e=V_L\cos\theta$ …①　（$V_L>0$　$V_L$ は$\theta=0$ のときの起電力）
①は $\cos\theta<0$ のとき $e<0$ となるが、これは図４のようにループを貫く磁場 $\vec{B}$ の向きが逆転することによる。

図３



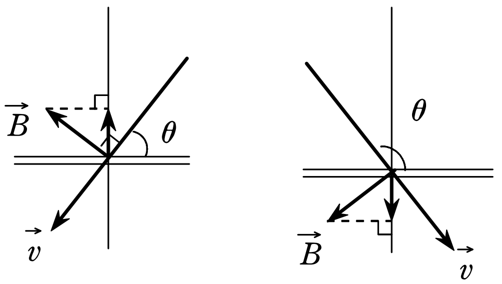

ループを貫く $\vec{B}$ の量は最大で 起電力$e=V_L$　(最大)

ループを貫く $\vec{B}$ の量ゼロで 起電力$e=0$

ループを貫く$\vec{B}$ の量 ↕ は $\cos\theta$ に比例し、起電力 $e$ も $\cos\theta$ に比例

図４

$\cos\theta<0$ のときは
ループを貫く磁場の向きが
逆転し、起電力 $e$ の符号が
変わる



４．さて、極方程式　$r = k\cos\theta$　（$k > 0$）は図５のような円を表す。これは $\cos\theta < 0$ のときは $r < 0$ だから原点対称の位置に移す、よってただ一つの円を表すのであった。（図６）

図５

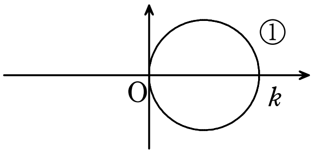
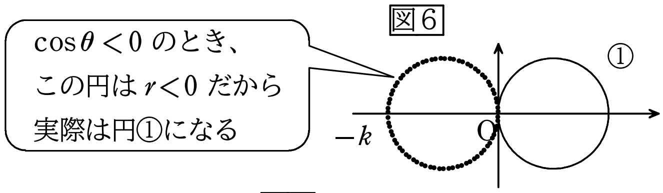



図６




そこで $r = k\cos\theta$ を
図７のように２つの円で表すことにする。
すると　①の$e = V_L\cos\theta$　は
図８のように２つの円になる。この2つの円は
$e$ の符号が異なるだけで、アンテナに起電力が発生している
ことに変わりはないから、ループアンテナの受信の
指向性を表す。$\theta = 0°$、180°で受信電波強度が最大、
90°か270°で受信強度がゼロである。

図７

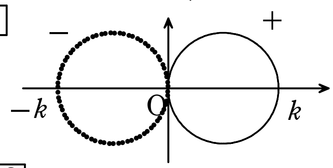
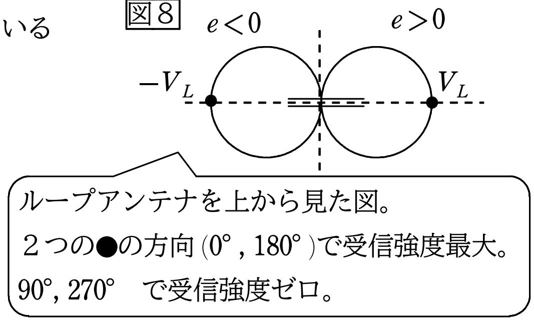



図８




５．ここで、さらに
「垂直アンテナ（センスアンテナ）」
と呼ばれる鉛直方向の
直線状のアンテナを
加える。垂直アンテナ内の
電子は電場 $\vec{E}$ に動かされ、
起電力 $e$ が発生（図９）。
垂直アンテナの周りの
受信強度は図１０のように
どの方角も同じである。

図9

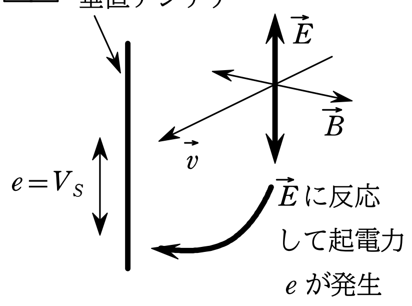
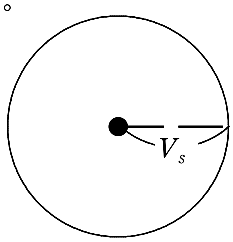



図１０ 垂直アンテナを上から見た図の受信強度分布。どの方角も同じ。




６．ループアンテナと垂直アンテナを合わせると、
合成起電力は $e = V_L\cos\theta + V_S$　これは　$V_L = V_S$ のときカージイドとなる。（図１１）
つまりアンテナを鉛直方向に立てて回転し、受信強度ゼロとなる角度を探す。これはカージイド
の尖った点なので見つけやすい。その方角が電波の来る方角ということになる。

図１１　$V_S = V_L$ のとき $e = V_L\cos\theta + V_L$

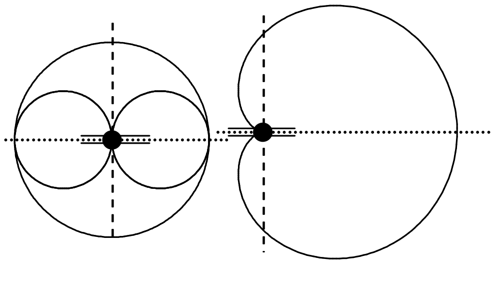
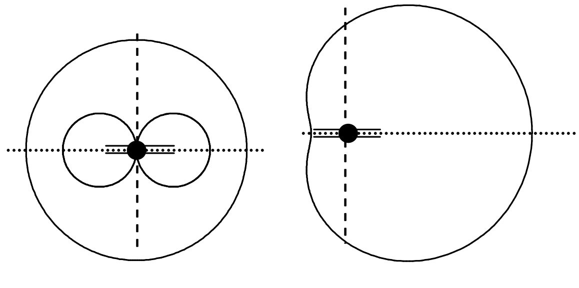


図１２　$V_S > V_L$ のとき $e = V_L\cos\theta + V_S$



実際には $V_L = V_S$ とすることは難しく、尖点は現れないのでわかりにくい（図１２）。よって図８のループアンテナの受信強度ゼロとなる尖点（２つある）で方角を2つに絞り、その後、垂直アンテナを加えて、どちらかを決定する方法が取られる。