2025.1.10（第１回発表）1.24（改定）

「九九表であそぶ」

広田祥治（愛知・西三数学サークル）

九九表の中にはいろいろおもしろい性質があります。いくつか考えてみましょう。

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

$\boxed{1}$　この九九表の中に出てくる1から 81 までの数の合計を計算してください。
全部一人でやると大変だから 3 人ずつのグループに分かれて計算するといいです。
（1 の段から 3 の段•••A　4 の段から 6 の段•••B　7 の段から 9 の段•••C）
じゃんけんで勝ったグループから好きなところを選んで計算してください。

Aの計算（例えば•••

1＋2＋3＋4＋5＋6＋7＋8＋9＝45
2＋4＋6＋・・・・　＋16＋18＝90　（＝2×45）
3＋6＋・・・・・　＋24＋27＝135　（＝3×45）

Bの計算（例えば•••

4＋8＋・・・・・　＋32＋36＝180　（＝4×45）
5＋10＋・・・・・・　＋40＋45＝225　（＝5×45）
6＋12＋・・・・・・　＋48＋54＝270　（＝6×45）

Cの計算（例えば•••

7＋14＋・・・・・・　＋56＋63＝315　（＝7×45）
8＋16＋・・・・・・　＋64＋72＝360　（＝8×45）
9＋18＋・・・・・・　＋72＋81＝405　（＝9×45）

じつはこの計算を通して各段の和は真ん中の数がポイントと気が付くと思います。

そしてA＋B＋Cを計算すると　…　　$\overbrace{(1+2+\cdots 8+9)}^{45}\times 45=45^2$　＝2025！

というということで今年は貴重な（？）年です。

でもこの数字は九九表の中の真ん中の数（25）と、最後の数（81）を使っても表されるのです。　　確かめてみましょう。

25×81＝2025

$\boxed{2}$　他にも面白い性質がいろいろあるようです。どんな性質に気が付きますか。

1）　例えば　５の段までで考えると　１から 25 までの表の数の和

（1＋2＋3＋4＋5）＋・・・・・＋（5＋10＋15＋20＋25）・・・・・＊

これは、どうなっているのでしょうか。

同様に　1＋2＋3＋4＋5＝3×5＝15＝1×15　で

2＋4＋6＋8＋10＝2×15

3＋6＋9＋12＋15＝3×15

4＋8＋12＋16＋20＝4×15

5＋10＋15＋20＋25＝5×15

よって

＊　＝（1＋2＋3＋4＋5）×15＝15^2　＝225

この性質は　$\boxed{1}$の性質と同じなので、どの段まででも通用しそうです。

・・・・6）に続く

2）ほかの性質も見つけてください。例えば

３の段以上の真ん中の数（平方数；9，16，25，・・・81）に注目すると

9＝3＋6

16＝4＋12・・・・　　この後はどうなっているのでしょうか。

25＝5＋20　＝1×5＋5×4

36＝6＋30　＝1×6＋6×5

49＝7＋42　＝1×7＋7×6

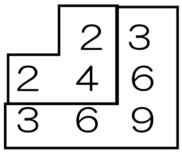
・・・・・

文字を使えば

n^2　＝n＋n（n－1）　　だから当たり前？？？

３）今度は左上から順に  という形（グノモン形）で区切ってみましょう。

その合計を考えます。



１　　２段目から考えます

２＋４＋２＝ □ ＝ □

3+6+9+6+3＝ □ ＝ □

４＋８＋１２＋１６＋１２＋８＋４＝ □ ＝ □

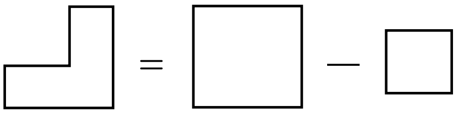
５＋10＋15＋20＋25＋20＋15＋10＋５＝ □ ＝ □　　・・・＊

・・・　・・・

９＋18＋27＋36＋45＋54＋63＋72＋81＋72＋・・・＋９＝ □ ＝ □

４）　１）と３）の結果から次の等式が得られそうです。

たとえば 5 の段のグノモンは



５＋10＋15＋20＋25＋20＋15＋10＋５

＝ 15^2 － 10^2

＝ １２５　　・・・＊と計算もできます。

５）４）のアイデアを九九表からｎ・ｎ表へ

自然数ｎに拡張して　ｎ・ｎ表(注１)を考えても同様に考えられます。

そうすると､次の 3 乗和の公式が得られます。（注2参照）

さらに　4 乗和の公式作りも挑戦できますが　これはｎ・ｎ表をどう拡張すればいいのでしょうか。

（「数学教室 2013 年９月号」所収〈数列の和・・・Σ の公式をもう一度作り直す〉

拙稿参照）

6)　ここで元に戻って最初の1)の一般化を考えます。
　たとえば、対角線の平方数の一つ25を中心にして 5 個の数が並ぶ 5×5の正方形の中に入る数の和を求める方法を考えます。

9	12	15	18	21
12	16	20	24	28
15	20	25	30	35
18	24	30	36	42
21	28	35	42	49

（9＋12＋15＋18＋21）＋⋯⋯⋯＋（21＋28＋35＋42＋49）

＝ 3（3＋4＋5＋6＋7）＋4（3＋・・・＋7）＋・‥＋7（3＋4＋3＋4＋5＋6＋7）

これは　（5×5）^{2}　＝625　で計算できます。

一般化はｎ^{2}に注目し、これを対角線の中心に１片２ｐ＋1（ｐ＝1，２，３，・・）の正方形に入る数（２ｐ＋１）×（２ｐ＋１）の数の行列を考えます。
この（２ｐ＋１）×（２ｐ＋１）個の数の合計はいくつになるのでしょうか。

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & n-p & & n & & n+p \\
\hline
n-p & (n-p)^2 \quad (n-p)(n-p+1) & \cdots & (n-p)\,n & \cdots & (n-p)(n+p) \\
 & (n-p+1)(n-p) & \cdots & \cdots & & \cdots \\
 & \cdots & & \cdots & & \cdots \\
n & n(n-p) & \cdots & n^2 & \cdots & n(n+p) \\
 & \cdots & & \cdots & & \cdots \\
 & \cdots & & \cdots & & \cdots \\
n+p & (n+p)(n-p) & \cdots & (n+p)\,n & \cdots & (n+p)^2
\end{array}
$$

合計は

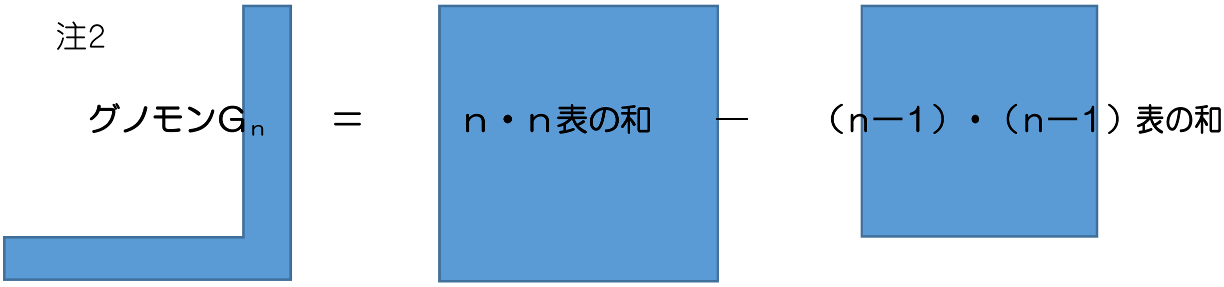
$$
\begin{aligned}
&(n-p)^2+(n-p)(n-p+1)+\cdots+(n-p)(n+1)+\cdots+(n+p)^2 \\
&=\cdots\cdot \\
&=\{(n-p)+\cdots n+\cdots(n+p)\}\times\{(n-p)+\cdots n+\cdots(n+p)\} \quad =\{(2p+1)\,n\}^2
\end{aligned}
$$

注1　n•n表　（n=19）

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51	54	57
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64	68	72	76
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90	96	102	108	114
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	105	112	119	126	133
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	112	120	128	136	144	152
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108	117	126	135	144	153	162	171
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132	143	154	165	176	187	198	209
12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144	156	168	180	192	204	216	228
13	26	39	52	65	78	91	104	117	130	143	156	169	182	195	208	221	234	247
14	28	42	56	70	84	98	112	126	140	154	168	182	196	210	224	238	252	266
15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180	195	210	225	240	255	270	285
16	32	48	64	80	96	112	128	144	160	176	192	208	224	240	256	272	288	304
17	34	51	68	85	102	119	136	153	170	187	204	221	238	255	272	289	306	323
18	36	54	72	90	108	126	144	162	180	198	216	234	252	270	288	306	324	342
19	38	57	76	95	114	133	152	171	190	209	228	247	266	285	304	323	342	361

たとえば19×19表にある数の合計は•••中心の数（10^2）×最後の数（19^2）＝100×361＝36100

注2



$$G_n = \left\{ \frac{1}{2} n(n+1) \right\}^2 - \left\{ \frac{1}{2} n(n-1) \right\}^2 = n^3$$

よって　$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = \left\{ \frac{1}{2} n(n+1) \right\}^2$